Karlsruher Institut für Technologie

8. Übung – Algorithmen I

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Grundlagen der Graphentheorie

Graphen und Relationen

Relation

Ist eine Menge M gegeben, dann heißt $R \subseteq M \times M$ eine Relation und man schreibt auch $x\,R\,y$, falls $(x, y) \in R$.

Spezielle Relationen: symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch, Äquivalenz-Relationen, etc. Beispiele: $x = y$, $x \leq y$ oder $x \mid y$ (teilt).

gerichteter Graph

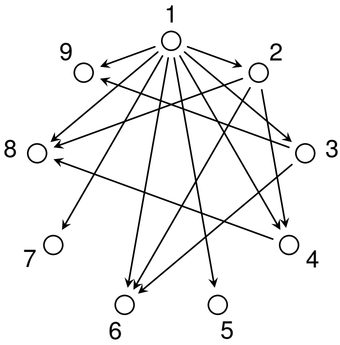
Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus Knoten V und Kanten E, wobei V nicht leer ist und $E \subseteq V \times V$ ist.

ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus Knoten V und Kanten E, wobei V nicht leer ist und $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$ ist.

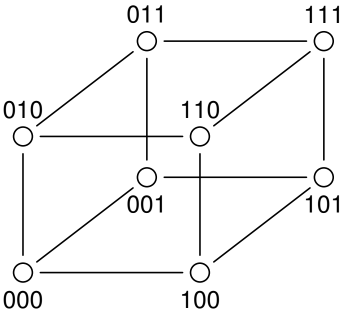
Teilbarkeitsgraph

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit
$V = \{1, \ldots, 9\}$ und $E = \{(x, y) \mid x, y \in V,\ x \neq y$ und $x|y\}$,
wobei $x|y$ genau dann, wenn x teilt y, also $\exists n \in \mathbb{N} : xn = y$ gilt.



Der Hyperwürfel Q_3

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{\{0,1\}^3\}$ und $E = \{\{x, y\} \mid x, y \in V$ und $x \oplus y \in \{100, 010, 001\}\}$.



Zwei Knoten $x, y \in V$ sind also adjazent, wenn x und y sich in genau einer Ziffer unterscheiden.

Adjazenz und Knotengrad

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Bereits bekannt:

- Ein Knoten $x \in V$ und eine Kante $e \in E$ heißen inzident, wenn $x \in e$.
- Zwei Knoten $x, y \in V$ mit $x \neq y$ heißen adjazent, wenn es eine Kante $e \in E$ mit $x \in e$ und $y \in e$ gibt.

Für ein Knoten $x \in V$ ist die Adjazenzmenge oder Nachbarn-Menge also

$$\mathrm{Adj}(x) = \{y \in V \mid x \neq y \text{ und } \{x, y\} \in E\}.$$

Der Grad eines Knoten $x \in V$ ist

$$\deg(x) := |\mathrm{Adj}(x)|.$$

(auch $\deg_G(x)$ oder $d_G(x)$ oder $\gamma_G(x)$ oder...)

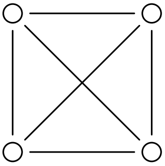
Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Knoten mit speziellem Knotengrad

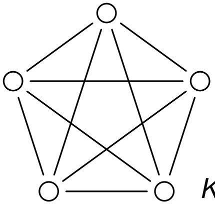
- Ein Knoten $v \in V$ mit $\deg(v) = 0$ heißt isoliert.
- Ein Knoten $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$ heißt Randknoten.
- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt knotenregulär vom Grad r, wenn

  $$\deg(v) = r \text{ für alle } v \in V \text{ gilt.}$$

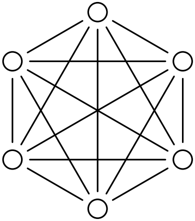
  Beispiel: der Hyperwürfel Q_3 ist 3-knotenregulär.
- Ein $(|V| - 1)$-knotenregulärer Graph heißt vollständig.



K_4



K_5



K_6

Handshake-Lemma

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma: Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,.$$

Handshake-Lemma

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma: Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,.$$

Beweis: Betrachte die Menge $M := \{(v, e) \mid v \in V,\, e \in E \text{ mit } v \in e\}$.

Handshake-Lemma

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma: Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,.$$

Beweis: Betrachte die Menge $M := \{(v, e) \mid v \in V,\ e \in E \text{ mit } v \in e\}$.
Für jede Kante $e \in E$ sind genau zwei Paare in M, also $|M| = 2|E|$.

Handshake-Lemma

Lemma: Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,.$$

Beweis: Betrachte die Menge $M := \{(v, e) \mid v \in V,\ e \in E \text{ mit } v \in e\}$.
Für jede Kante $e \in E$ sind genau zwei Paare in M, also $|M| = 2|E|$.
Für jeden Knoten $v \in V$ sind genau alle ausgehenden Kanten in M, also $|M| = \sum_{v \in V} \deg(v)\,.$

Handshake-Lemma

Karlsruher Institut für Technologie

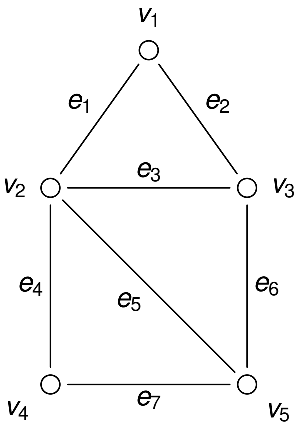
Lemma: Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,.$$

Beweis: Betrachte die Menge $M := \{(v, e) \mid v \in V,\ e \in E \text{ mit } v \in e\}$.
Für jede Kante $e \in E$ sind genau zwei Paare in M, also $|M| = 2|E|$.
Für jeden Knoten $v \in V$ sind genau alle ausgehenden Kanten in M, also $|M| = \sum_{v \in V} \deg(v)\,$.

Korollar: In jedem Graph gibt es eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Knotengrad.

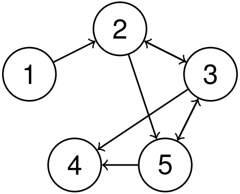
Adjazenz- und Inzidenzmatrix

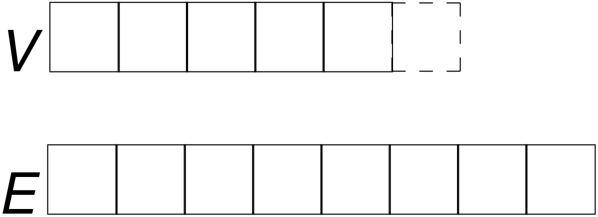


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

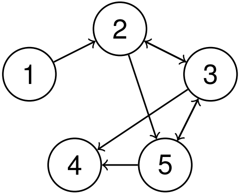
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjazenzfelder





Adjazenzfelder



V

1	2	4	7	7	9

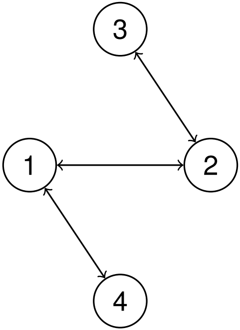
E

2	3	5	2	4	5	3	4

Graphen als Matrizen

Symmetrie

Ungerichteter Graph $\rightarrow$ symmetrische Adjazenzmatrix $A = A^T$

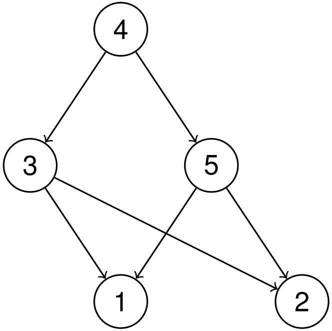


$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Graphen als Matrizen

DAG

DAGs lassen sich als obere Dreiecksmatrix repräsentieren

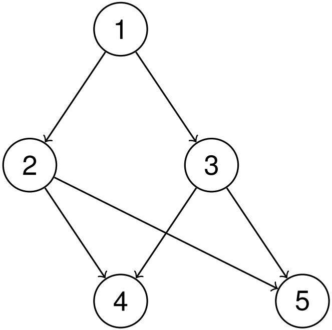


$$
\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}
$$

Graphen als Matrizen

DAG

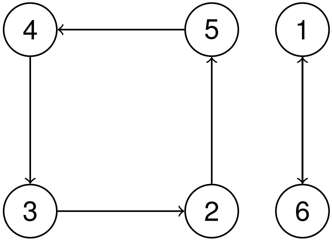
DAGs lassen sich als obere Dreiecksmatrix repräsentieren



$$
\begin{matrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}
$$

Graphen als Matrizen
Zusammenhangskomponenten

Pro Zusammenhangskomponente ein Block in der Matrix

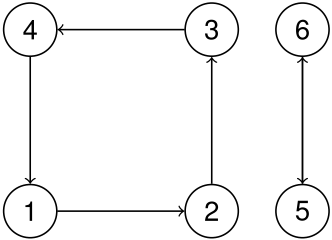


$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Graphen als Matrizen

Zusammenhangskomponenten

Pro Zusammenhangskomponente ein Block in der Matrix



$$
\begin{matrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{matrix}
$$

Unter- oder Teilgraphen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition: Ein Graph $G' = (V', E')$ ist ein Untergraph oder Teilgraph von $G = (V, E)$, geschrieben $G' \subseteq G$, wenn $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ und für alle $\{v_1, v_2\} \in E'$ sowohl $v_1 \in V'$ als auch $v_2 \in V'$.

Definition: Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $V' \subseteq V$ eine Knotenmenge, dann heißt der Graph $G[V'] := (V', E')$ mit $E' = \{\{v_1, v_2\} \in E \mid v_1, v_2 \in V'\}$ der durch V' knoten-induzierte Teilgraph von G.

Definition: Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $E' \subseteq E$ eine Kantenmenge, dann heißt der Graph $G[E'] := (V', E')$ mit $V' = \bigcup_{\{v_1, v_2\} \in E'} \{v_1, v_2\}$ der durch E' kanten-induzierte Teilgraph von G.

Wege, Kreise und Zusammenhang

Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann

- heißt eine Folge $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ mit $v_i \in V$ und $e_i \in E$ eine Kantenfolge, ein Kantenweg oder nur Weg (path), wenn

  $$e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n\,.$$

  Alternativ, kann man in Graphen ohne Mehrfachkanten eine Kantenfolge auch durch die Knotenspur $(v_0, \ldots, v_n)$ beschreiben.
- heißt eine Kantenfolge ein Kantenpfad oder nur Pfad (simple path), wenn alle besuchten Knoten verschieden sind.
- heißen zwei Knoten $x, y \in V$ verbindbar (connected), wenn es einen Weg mit $x = v_0$ und $y = v_n$ gibt.
- heißt der Graph G zusammenhängend (connected), wenn jedes Paar $(x, y) \in V \times V$ verbindbar ist.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Wege, Kreise und Zusammenhang

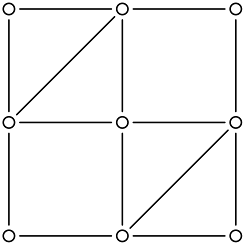
Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann

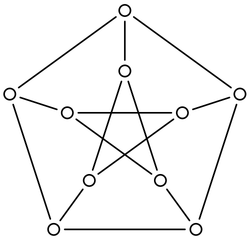
- heißt ein Kantenfolge $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ ein Kantenkreis oder Kantenzyklus (cycle), wenn $v_0 = v_n$,
- ein Kantenkreis einfach (simple), wenn alle besuchten Knoten außer v_0 und v_n verschieden sind, und
- der Graph G kreisfrei, kreislos oder zykelfrei (cycle free), wenn G keinen Kantenkreis enthält.

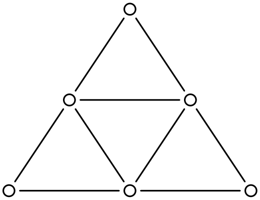
Eulersche und Hamiltonsche Kreise

Ein Kantenkreis heißt Eulersch, wenn er alle Kanten des Graphen genau einmal enthält.

Ein Kantenkreis heißt Hamiltonsch, wenn er alle Knoten des Graphen genau einmal enthält (Beginn und Ende einmal gezählt).





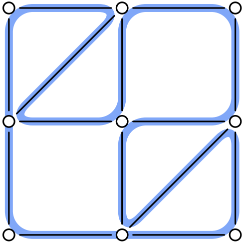


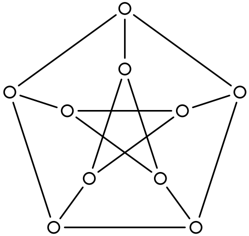
Ein Graph heißt Eulersch/Hamiltonsch, wenn er einen Eulerschen/Hamiltonschen Kreis enthält.

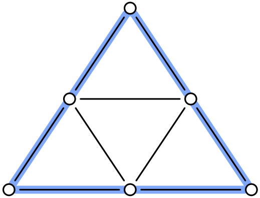
Eulersche und Hamiltonsche Kreise

Ein Kantenkreis heißt Eulersch, wenn er alle Kanten des Graphen genau einmal enthält.

Ein Kantenkreis heißt Hamiltonsch, wenn er alle Knoten des Graphen genau einmal enthält (Beginn und Ende einmal gezählt).







Ein Graph heißt Eulersch/Hamiltonsch, wenn er einen Eulerschen/Hamiltonschen Kreis enthält.

Satz von Euler (Graphen)

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Satz von Euler (Graphen)

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Beweis: „$\Longrightarrow$“
Klar, denn G muss zusammenhängend sein und beim Passieren eines Knoten wird dieser durch eine Kante betreten und durch eine andere verlassen.
Da jede Kante genau einmal verwendet wird, muss der Knotengrad aller Knoten gerade sein.

Satz von Euler (Graphen)

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Beweis: „$\Longleftarrow$“
Angenommen der Graph hat diese Eigenschaften, so betrachtet man eine Kantenpfad $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{r-1}, e_r, v_r)$ maximaler Länge, in dem also keine Kante zweimal vorkommt.

Behauptung 1: $v_0 = v_r$.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Satz von Euler (Graphen)

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Beweis: „$\Longleftarrow$“
Angenommen der Graph hat diese Eigenschaften, so betrachtet man eine Kantenpfad $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{r-1}, e_r, v_r)$ maximaler Länge, in dem also keine Kante zweimal vorkommt.

Behauptung 1: $v_0 = v_r$.

- Wäre $v_0 \neq v_r$, dann ist v_0 zu einer ungeraden Anzahl Kanten in P inzident.
- Da v_0 aber geraden Knotengrad hat, gibt es eine inzidente Kante $e \notin P$.
- Der Pfad P kann mit e verlängert werden, ist also nicht maximal! Widerspruch $\Longrightarrow v_0 = v_r$, also ist P ein Kreis.

Satz von Euler (Graphen)

Karlsruher Institut für Technologie

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Beweis: „$\Longleftarrow$“
Angenommen der Graph hat diese Eigenschaften, so betrachtet man eine Kantenkreis $C = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{r-1}, e_r, v_0)$ maximaler Länge, in dem also keine Kante zweimal vorkommt.

Behauptung 2: $E(C) := \{e_i \mid i = 1, \ldots, r\} = E$.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Satz von Euler (Graphen)

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Beweis: „$\Longleftarrow$“
Angenommen der Graph hat diese Eigenschaften, so betrachtet man eine Kantenkreis $C = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{r-1}, e_r, v_0)$ maximaler Länge, in dem also keine Kante zweimal vorkommt.

Behauptung 2: $E(C) := \{e_i \mid i = 1, \ldots, r\} = E$.

- Angenommen $E(C) \neq E$, so betrachten wir $G' := (V, E \setminus E(C))$.
- Da G zusammenhängt, muss G' und C einen gemeinsamen Knoten w mit $\deg_{G'}(w) > 0$ haben.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Satz von Euler (Graphen)

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Beweis: „$\Longleftarrow$“
Angenommen der Graph hat diese Eigenschaften, so betrachtet man eine Kantenkreis $C = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{r-1}, e_r, v_0)$ maximaler Länge, in dem also keine Kante zweimal vorkommt.

Behauptung 2: $E(C) := \{e_i \mid i = 1, \ldots, r\} = E$.

- Angenommen $E(C) \neq E$, so betrachten wir $G' := (V, E \setminus E(C))$.
- Da G zusammenhängt, muss G' und C einen gemeinsamen Knoten w mit $\deg_{G'}(w) > 0$ haben.
- Alle Knoten in G' haben geraden Knotengrad, also kann man in G' einen Kreis C' finden, der durch w geht.

Satz von Euler (Graphen)

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Knotengrad haben.

Beweis: „$\Longleftarrow$“
Angenommen der Graph hat diese Eigenschaften, so betrachtet man eine Kantenkreis $C = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{r-1}, e_r, v_0)$ maximaler Länge, in dem also keine Kante zweimal vorkommt.

Behauptung 2: $E(C) := \{e_i \mid i = 1, \ldots, r\} = E$.

- Angenommen $E(C) \neq E$, so betrachten wir $G' := (V, E \setminus E(C))$.
- Da G zusammenhängt, muss G' und C einen gemeinsamen Knoten w mit $\deg_{G'}(w) > 0$ haben.
- Alle Knoten in G' haben geraden Knotengrad, also kann man in G' einen Kreis C' finden, der durch w geht.
- C kann an Knoten w mit C' verlängert werden. Widerspruch zur Maximalität $\Longrightarrow E(C) = E$.