Übung Algorithmen I
13.5.15

Christoph Striecks
Christoph.Striecks@kit.edu

(Mit Folien von Julian Arz, Timo Bingmann und Sebastian Schlag.)

Roadmap

- Kurze Wiederholung Wahrscheinlichkeitstheorie
- Permutationen-Beispiel
- Sortieren durch Auswählen (Selection Sort)
- Sortieren durch Einfügen (Insertion Sort)
- Demo

Organisation

- Tutorien am Donnerstag, 14.5.15, fallen aus. Bitte in stattfindende Tutorien setzen.
- Abgabetermin um 12.45, freitags ist fix
- Übungsblätter beim Tutor abholen – anderenfalls bei mir, Raum 277, Geb. 50.34
- Mittsemesterklausur am 8.6.15

Wiederholung: Wahrscheinlichkeitstheorie

- Elementarereignisse: Ω
- Ereignisse: Teilmengen von Ω
- Gleichverteilung: $p_y = \frac{1}{|\Omega|}$
- Zufallsvariable: $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- 0-1-Zufallsvariable: $I : \Omega \to \{0, 1\}$
- Erwartungswert: $\mathrm{E}[X] = \sum_{y \in \Omega} p_y \cdot X(y)$
- Linearität des Erwartungswerts: $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$

Permutationen von $1, \ldots, 5$

$(1,2,3,4,5)$,$(1,2,3,5,4)$, $(1,2,4,3,5)$, $(1,2,4,5,3)$, $(1,2,5,3,4)$, $(1,2,5,4,3)$,
$(1,3,2,4,5)$, $(1,3,2,5,4)$, $(1,3,4,2,5)$, $(1,3,4,5,2)$, $(1,3,5,2,4)$, $(1,3,5,4,2)$,
$(1,4,2,3,5)$, $(1,4,2,5,3)$, $(1,4,3,2,5)$, $(1,4,3,5,2)$, $(1,4,5,2,3)$, $(1,4,5,3,2)$,
$(1,5,2,3,4)$, $(1,5,2,4,3)$, $(1,5,3,2,4)$, $(1,5,3,4,2)$, $(1,5,4,2,3)$, $(1,5,4,3,2)$,
$(2,1,3,4,5)$, $(2,1,3,5,4)$, $(2,1,4,3,5)$, $(2,1,4,5,3)$, $(2,1,5,3,4)$, $(2,1,5,4,3)$,
$(2,3,1,4,5)$, $(2,3,1,5,4)$, $(2,3,4,1,5)$, $(2,3,4,5,1)$, $(2,3,5,1,4)$, $(2,3,5,4,1)$,
$(2,4,1,3,5)$, $(2,4,1,5,3)$, $(2,4,3,1,5)$, $(2,4,3,5,1)$, $(2,4,5,1,3)$, $(2,4,5,3,1)$,
$(2,5,1,3,4)$, $(2,5,1,4,3)$, $(2,5,3,1,4)$, $(2,5,3,4,1)$, $(2,5,4,1,3)$, $(2,5,4,3,1)$,
$(3,1,2,4,5)$, $(3,1,2,5,4)$, $(3,1,4,2,5)$, $(3,1,4,5,2)$, $(3,1,5,2,4)$, $(3,1,5,4,2)$,
$(3,2,1,4,5)$, $(3,2,1,5,4)$, $(3,2,4,1,5)$, $(3,2,4,5,1)$, $(3,2,5,1,4)$, $(3,2,5,4,1)$,
$(3,4,1,2,5)$, $(3,4,1,5,2)$, $(3,4,2,1,5)$, $(3,4,2,5,1)$, $(3,4,5,1,2)$, $(3,4,5,2,1)$,
$(3,5,1,2,4)$, $(3,5,1,4,2)$, $(3,5,2,1,4)$, $(3,5,2,4,1)$, $(3,5,4,1,2)$, $(3,5,4,2,1)$,
$(4,1,2,3,5)$, $(4,1,2,5,3)$, $(4,1,3,2,5)$, $(4,1,3,5,2)$, $(4,1,5,2,3)$, $(4,1,5,3,2)$,
$(4,2,1,3,5)$, $(4,2,1,5,3)$, $(4,2,3,1,5)$, $(4,2,3,5,1)$, $(4,2,5,1,3)$, $(4,2,5,3,1)$,
$(4,3,1,2,5)$, $(4,3,1,5,2)$, $(4,3,2,1,5)$, $(4,3,2,5,1)$, $(4,3,5,1,2)$, $(4,3,5,2,1)$,
$(4,5,1,2,3)$, $(4,5,1,3,2)$, $(4,5,2,1,3)$, $(4,5,2,3,1)$, $(4,5,3,1,2)$, $(4,5,3,2,1)$,
$(5,1,2,3,4)$, $(5,1,2,4,3)$, $(5,1,3,2,4)$, $(5,1,3,4,2)$, $(5,1,4,2,3)$, $(5,1,4,3,2)$,
$(5,2,1,3,4)$, $(5,2,1,4,3)$, $(5,2,3,1,4)$, $(5,2,3,4,1)$, $(5,2,4,1,3)$, $(5,2,4,3,1)$,
$(5,3,1,2,4)$, $(5,3,1,4,2)$, $(5,3,2,1,4)$, $(5,3,2,4,1)$, $(5,3,4,1,2)$, $(5,3,4,2,1)$,
$(5,4,1,2,3)$, $(5,4,1,3,2)$, $(5,4,2,1,3)$, $(5,4,2,3,1)$, $(5,4,3,1,2)$, $(5,4,3,2,1)$.

- Insgesamt $5! = 120$ (Permutations-)Möglichkeiten

Sortieren – Intuition

Die meisten intuitiven Sortieralgorithmen basieren auf:

1. Selection: finde das kleinste (oder größte) Element, und trenne es von den übrigen. Wiederhole, bis alle ausgewählt wurden.
2. Insertion: betrachte Elemente einzeln und füge in sortierte Teilfolgen ein.
3. Exchange: vertauscht ungeordnete Paare von Elemente, bis keine weiteren Vertauschungen notwendig sind.
4. Enumeration: vergleiche ein Element mit allen anderen. Dann platziere es endgültig an Hand der Anzahl kleiner Elemente.

Sortieren durch Auswählen (Selection Sort)

```
Function selectionSort(A : Array of Element; n : ℕ)
    for i := 0 to n − 1 do
        min := i
        for j := i + 1 to n − 1 do        // Suche kleinstes Element
            if A[j] < A[min] then
                min := j
        endfor
        swap(A[i], A[min])                // Tausche Element an Anfang
        invariant A[0] ≤ ··· ≤ A[i]
    endfor
```

Wie viele Vergleiche? (Demo-Beispiel) **immer** $\frac{n(n-1)}{2} = \Theta\left(n^2\right)$

Sortieren durch Einfügen (Insertion Sort)

```
Function insertionSort(A : Array of Element; n : ℕ)
    for i := 1 to n − 1 do
        j := i
        x := A[j]
        while (j > 0) ∧ (A[j − 1] > x)    // Finde richtige Stelle j
            A[j] := A[j − 1]              // Schiebe größere Elemente
            j := j − 1                    // nach hinten.
        endwhile
        A[j] := x                         // Setze Element
        invariant A[0] ≤ ··· ≤ A[i]
    endfor
```

Trick: vermeide $j > 0$ mit einem Sentinel $A[-1] := -\infty$. Wie viele Vergleiche? (Demo-Beispiel) **worst-case:** $\dfrac{n(n-1)}{2} = \Theta\left(n^2\right)$,
average?

Sortieren durch Einfügen (Insertion Sort)

```
Function insertionSort(A : Array of Element; n : ℕ)
    for i := 1 to n − 1 do
        j := i

        while (j > 0) ∧ (A[j − 1] > A[j])// Finde richtige Stelle j
            swap(A[j − 1], A[j])      // Schiebe größere Elemente
            j := j − 1                          // nach hinten.
        endwhile

        invariant A[0] ≤ ··· ≤ A[i]
    endfor
```

Wie viele Swaps? **worst-case:** $\frac{n\,(n-1)}{2} = \Theta\left(n^2\right)$, **average?**

Permutationen – Inversionen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ein Paar $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ mit $i < j$ ist eine Inversion, wenn $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Insertion Sort – Average Case

Annahme: Alle Elemente verschieden und die Eingabe ist eine zufällige Permutation von n Elementen davon.
$\Rightarrow$ Jede der $n!$ Permutationen σ ist gleich wahrscheinlich.

$$\sigma = \ (\ 3\ \ 4\ \ 1\ \ 5\ \ 2\ )$$

Eine zufällige Permutation hat zwischen 0 und $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Inversionen.
Beispiele: $(1, 2, 3, 4, 5)$ und $(5, 4, 3, 2, 1)$.

Insertion Sort – Average Case

$$\sigma = \ (\ 3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2 \ )$$

Jeder Austausch falsch sortierter, benachbarter Positionen (swap) reduziert die Anzahl der Inversionen um genau 1.

$\Rightarrow$ Die Anzahl von swaps in Insertion-Sort ist genau die Anzahl Inversionen in der Eingabe-Permutation.

Nenne diese Anzahl $X(\sigma)$. Wir suchen den Erwartungswert: $\mathrm{E}(X(\sigma))$.

Insertion Sort – Average Case

Wir zählen die erwartete Anzahl von Inversionen:
Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ sei

$$X_{i,j}(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \text{ eine Inversion in } \sigma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist $X(\sigma) := \sum_{i<j} X_{i,j}(\sigma)$ die Anzahl von Inversionen und

$$\mathrm{E}(X(\sigma)) = \mathrm{E}\Big(\sum_{i<j} X_{i,j}(\sigma)\Big) = \sum_{i<j} \mathrm{E}(X_{i,j}(\sigma)).$$

$\mathrm{E}(X_{i,j}(\sigma))$?

Permutationen, $\sigma(2) \in \{3,5\}$ und $\sigma(4) \in \{3,5\}$

$$
\begin{gathered}
(1,2,3,4,5),\ (1,2,3,5,4),\ (1,2,4,3,5),\ (1,2,4,5,3),\ (1,2,5,3,4),\ (1,2,5,4,3),\\
(1,3,2,4,5),\ (1,3,2,5,4),\ (1,3,4,2,5),\ (1,3,4,5,2),\ (1,3,5,2,4),\ (1,3,5,4,2),\\
(1,4,2,3,5),\ (1,4,2,5,3),\ (1,4,3,2,5),\ (1,4,3,5,2),\ (1,4,5,2,3),\ (1,4,5,3,2),\\
(1,5,2,3,4),\ (1,5,2,4,3),\ (1,5,3,2,4),\ (1,5,3,4,2),\ (1,5,4,2,3),\ (1,5,4,3,2),\\
(2,1,3,4,5),\ (2,1,3,5,4),\ (2,1,4,3,5),\ (2,1,4,5,3),\ (2,1,5,3,4),\ (2,1,5,4,3),\\
(2,3,1,4,5),\ (2,3,1,5,4),\ (2,3,4,1,5),\ (2,3,4,5,1),\ (2,3,5,1,4),\ (2,3,5,4,1),\\
(2,4,1,3,5),\ (2,4,1,5,3),\ (2,4,3,1,5),\ (2,4,3,5,1),\ (2,4,5,1,3),\ (2,4,5,3,1),\\
(2,5,1,3,4),\ (2,5,1,4,3),\ (2,5,3,1,4),\ (2,5,3,4,1),\ (2,5,4,1,3),\ (2,5,4,3,1),\\
(3,1,2,4,5),\ (3,1,2,5,4),\ (3,1,4,2,5),\ (3,1,4,5,2),\ (3,1,5,2,4),\ (3,1,5,4,2),\\
(3,2,1,4,5),\ (3,2,1,5,4),\ (3,2,4,1,5),\ (3,2,4,5,1),\ (3,2,5,1,4),\ (3,2,5,4,1),\\
(3,4,1,2,5),\ (3,4,1,5,2),\ (3,4,2,1,5),\ (3,4,2,5,1),\ (3,4,5,1,2),\ (3,4,5,2,1),\\
(3,5,1,2,4),\ (3,5,1,4,2),\ (3,5,2,1,4),\ (3,5,2,4,1),\ (3,5,4,1,2),\ (3,5,4,2,1),\\
(4,1,2,3,5),\ (4,1,2,5,3),\ (4,1,3,2,5),\ (4,1,3,5,2),\ (4,1,5,2,3),\ (4,1,5,3,2),\\
(4,2,1,3,5),\ (4,2,1,5,3),\ (4,2,3,1,5),\ (4,2,3,5,1),\ (4,2,5,1,3),\ (4,2,5,3,1),\\
(4,3,1,2,5),\ (4,3,1,5,2),\ (4,3,2,1,5),\ (4,3,2,5,1),\ (4,3,5,1,2),\ (4,3,5,2,1),\\
(4,5,1,2,3),\ (4,5,1,3,2),\ (4,5,2,1,3),\ (4,5,2,3,1),\ (4,5,3,1,2),\ (4,5,3,2,1),\\
(5,1,2,3,4),\ (5,1,2,4,3),\ (5,1,3,2,4),\ (5,1,3,4,2),\ (5,1,4,2,3),\ (5,1,4,3,2),\\
(5,2,1,3,4),\ (5,2,1,4,3),\ (5,2,3,1,4),\ (5,2,3,4,1),\ (5,2,4,1,3),\ (5,2,4,3,1),\\
(5,3,1,2,4),\ (5,3,1,4,2),\ (5,3,2,1,4),\ (5,3,2,4,1),\ (5,3,4,1,2),\ (5,3,4,2,1),\\
(5,4,1,2,3),\ (5,4,1,3,2),\ (5,4,2,1,3),\ (5,4,2,3,1),\ (5,4,3,1,2),\ (5,4,3,2,1).
\end{gathered}
$$

Permutationen, $\sigma(2) \in \{3,5\}$ und $\sigma(4) \in \{3,5\}$

$(1,2,3,4,5)$,	$(1,2,3,5,4)$,	$(1,2,4,3,5)$,	$(1,2,4,5,3)$,	$(1,2,5,3,4)$,	$(1,2,5,4,3)$,
$(1,3,2,4,5)$,	$(1,3,2,5,4)$,	$(1,3,4,2,5)$,	$(1,3,4,5,2)$,	$(1,3,5,2,4)$,	$(1,3,5,4,2)$,
$(1,4,2,3,5)$,	$(1,4,2,5,3)$,	$(1,4,3,2,5)$,	$(1,4,3,5,2)$,	$(1,4,5,2,3)$,	$(1,4,5,3,2)$,
$(1,5,2,3,4)$,	$(1,5,2,4,3)$,	$(1,5,3,2,4)$,	$(1,5,3,4,2)$,	$(1,5,4,2,3)$,	$(1,5,4,3,2)$,
$(2,1,3,4,5)$,	$(2,1,3,5,4)$,	$(2,1,4,3,5)$,	$(2,1,4,5,3)$,	$(2,1,5,3,4)$,	$(2,1,5,4,3)$,
$(2,3,1,4,5)$,	$(2,3,1,5,4)$,	$(2,3,4,1,5)$,	$(2,3,4,5,1)$,	$(2,3,5,1,4)$,	$(2,3,5,4,1)$,
$(2,4,1,3,5)$,	$(2,4,1,5,3)$,	$(2,4,3,1,5)$,	$(2,4,3,5,1)$,	$(2,4,5,1,3)$,	$(2,4,5,3,1)$,
$(2,5,1,3,4)$,	$(2,5,1,4,3)$,	$(2,5,3,1,4)$,	$(2,5,3,4,1)$,	$(2,5,4,1,3)$,	$(2,5,4,3,1)$,
$(3,1,2,4,5)$,	$(3,1,2,5,4)$,	$(3,1,4,2,5)$,	$(3,1,4,5,2)$,	$(3,1,5,2,4)$,	$(3,1,5,4,2)$,
$(3,2,1,4,5)$,	$(3,2,1,5,4)$,	$(3,2,4,1,5)$,	$(3,2,4,5,1)$,	$(3,2,5,1,4)$,	$(3,2,5,4,1)$,
$(3,4,1,2,5)$,	$(3,4,1,5,2)$,	$(3,4,2,1,5)$,	$(3,4,2,5,1)$,	$(3,4,5,1,2)$,	$(3,4,5,2,1)$,
$(3,5,1,2,4)$,	$(3,5,1,4,2)$,	$(3,5,2,1,4)$,	$(3,5,2,4,1)$,	$(3,5,4,1,2)$,	$(3,5,4,2,1)$,
$(4,1,2,3,5)$,	$(4,1,2,5,3)$,	$(4,1,3,2,5)$,	$(4,1,3,5,2)$,	$(4,1,5,2,3)$,	$(4,1,5,3,2)$,
$(4,2,1,3,5)$,	$(4,2,1,5,3)$,	$(4,2,3,1,5)$,	$(4,2,3,5,1)$,	$(4,2,5,1,3)$,	$(4,2,5,3,1)$,
$(4,3,1,2,5)$,	$(4,3,1,5,2)$,	$(4,3,2,1,5)$,	$(4,3,2,5,1)$,	$(4,3,5,1,2)$,	$(4,3,5,2,1)$,
$(4,5,1,2,3)$,	$(4,5,1,3,2)$,	$(4,5,2,1,3)$,	$(4,5,2,3,1)$,	$(4,5,3,1,2)$,	$(4,5,3,2,1)$,
$(5,1,2,3,4)$,	$(5,1,2,4,3)$,	$(5,1,3,2,4)$,	$(5,1,3,4,2)$,	$(5,1,4,2,3)$,	$(5,1,4,3,2)$,
$(5,2,1,3,4)$,	$(5,2,1,4,3)$,	$(5,2,3,1,4)$,	$(5,2,3,4,1)$,	$(5,2,4,1,3)$,	$(5,2,4,3,1)$,
$(5,3,1,2,4)$,	$(5,3,1,4,2)$,	$(5,3,2,1,4)$,	$(5,3,2,4,1)$,	$(5,3,4,1,2)$,	$(5,3,4,2,1)$,
$(5,4,1,2,3)$,	$(5,4,1,3,2)$,	$(5,4,2,1,3)$,	$(5,4,2,3,1)$,	$(5,4,3,1,2)$,	$(5,4,3,2,1)$.

Insertion Sort – Average Case

Wir zählen die erwartete Anzahl von Inversionen:
Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ sei

$$X_{i,j}(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \text{ eine Inversion in } \sigma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist $X(\sigma) := \sum_{i<j} X_{i,j}(\sigma)$ die Anzahl von Inversionen und

$$\mathrm{E}(X(\sigma)) = \mathrm{E}\Big(\sum_{i<j} X_{i,j}(\sigma)\Big) = \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{E}(X_{i,j}(\sigma))\,.$$

Da $\mathrm{E}(X_{i,j}(\sigma)) = \frac{1}{2}$, gilt $\mathrm{E}(X(\sigma)) = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Worst case $\frac{n\,(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ und average case $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$.